ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Koji je broj veći

$$A = 2022 \cdot (2024^2 - 2024 + 1) \qquad \text{ili} \quad B = 2024^3 - 3 \cdot 2024^2 + 3 \cdot 2024 \text{ ?}$$

Rješenje.

Označimo $n = 2024$.

Oduzmimo promatrane brojeve. 2 boda

Vrijedi

$$\begin{aligned} B - A &= n^3 - 3n^2 + 3n - (n-2) \cdot (n^2 - n + 1) \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - (n^3 - 3n^2 + 3n - 2) && \text{2 boda} \\ &= 2. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Zaključujemo da je B veći od ta dva broja. 1 bod

Napomena: Rješenja koja ni na koji način ne ostvare neki drugi bod u ovom zadatku ostvaruju 1 bod ukoliko su uveli oznaku poput $n = 2024$.

Moguće je i direktno izračunati vrijednosti za A i B:

$$\begin{aligned} A &= 2022 \cdot (4096576 - 2024 + 1) = 8279186166, \\ B &= 8291469824 - 3 \cdot 4096576 + 6072 = 8279186168. \end{aligned}$$

Točan izračun jednog od brojeva A i B nosi 3 boda, preostalog 2 boda, te konačan zaključak 1 bod.

Zadatak A-1.2.

Neka su a, b, c, d međusobno različiti cijeli brojevi takvi da vrijedi

$$(a - 2024)(b - 2024)(c - 2024)(d - 2024) = 9.$$

Odredi $a + b + c + d$.

Rješenje.

Budući da su a, b, c, d međusobno različiti cijeli brojevi, onda su i $a - 2024$, $b - 2024$, $c - 2024$ i $d - 2024$ međusobno različiti cijeli brojevi.

Kako bi umnožak 4 različita cjelobrojna djelitelja broja 9 bio jednak 9, nijedan od njih ne smije biti 9 ili -9. Preostali djelitelji broja 9 su $-3, -1, 1, 3$. 2 boda

Kako u umnošku daju 9, zaključujemo da su to upravo vrijednosti faktora $a - 2024$, $b - 2024$, $c - 2024$ i $d - 2024$. 2 boda

Zato je

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= (a - 2024) + (b - 2024) + (c - 2024) + (d - 2024) + 4 \cdot 2024 && \text{1 bod} \\ &= -3 - 1 + 1 + 3 + 8096 = 8096 && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Zadatak A-1.3.

Farmer Ivan na svojoj farmi ima kokoši, svinje i ovce. Njegove životinje imaju ukupno 46 glava i 124 noge. Kad bi udvostručio broj kokoši i utrostručio broj ovaca na farmi, uz isti broj svinja, ukupan broj nogu svih životinja na farmi bio bi 232. Koliko bi u tome slučaju bilo glava?

Rješenje.

Neka je K broj kokoši, a N broj ostalih (četveronožnih) životinja. Iz prva dva uvjeta zadatka dobivamo

$$\begin{aligned} K + N &= 46, \\ 2K + 4N &= 124. \end{aligned}$$ 1 bod

Uvrštavajući iz prve jednadžbe $N = 46 - K$ u drugu dobivamo 1 bod

$$\begin{aligned} 2K + 4 \cdot (46 - K) &= 124 \\ 184 - 2K &= 124 \\ K &= 30. \end{aligned}$$ 2 boda

Neka su $2K$ i N' brojevi životinja u drugom slučaju. Iz uvjeta broja nogu dobivamo

$$232 = 2 \cdot 2K + 4N' = 120 + 4N',$$

iz čega dobivamo $N' = 28$. 1 bod

U tom slučaju, broj glava životinja na farmi bi bio

$$2K + N' = 2 \cdot 30 + 28 = 88.$$ 1 bod

Napomena: Zadatak se može riješiti sustavom 3 jednadžbe s 3 nepoznanice:

$$K + S + O = 46$$
$$2K + 4S + 4O = 124$$
$$2 \cdot 2K + 4S + 4 \cdot 3O = 232,$$

gdje je K broj kokoši, S broj svinja, a O broj ovaca na farmi. Postavljanje sustava nosi 1 bod, određivanje jedne od vrijednosti nepoznanica ($O = 6$, $S = 10$, $K = 30$) nosi 2 boda, određivanje preostale dvije vrijednosti nepoznanica po 1 bod, te konačno određivanje novog broja glava jednadžbom

$$2K + S + 3O = 2 \cdot 30 + 10 + 3 \cdot 6 = 88$$

nosi 1 bod.

Zadatak A-1.4.

Odredi najmanji prirodni broj kojemu je zbroj znamenaka djeljiv sa 7 te ima svojstvo da je zbroj znamenaka njegova sljedbenika također djeljiv sa 7.

Rješenje.

Neka je n traženi prirodni broj. Pretpostavimo da n završava s k znamenaka 9, te neka je A broj dobiven brisanjem tih k znamenaka 9. 1 bod

Brojevi k i A su nenegativni cijeli brojevi koji nisu oba jednaka nuli. Broj A ne završava znamenkom 9. Neka je s_A zbroj znamenaka broja A.

Zbroj znamenaka broja n jednak je $s_A + 9k$. 1 bod

Njegov sljedbenik završava s točno k nula, te je ispred tih nula zapisan broj $A + 1$. Zbroj znamenaka sljedbenika je zato $s_A + 1$. 1 bod

Kako bi broj $s_A + 1$ bio djeljiv sa 7, najmanja vrijednost za A je 6. 1 bod

Kako bi broj $s_A + 9k = 6 + 9k$ bio djeljiv sa 7, najmanja vrijednost za k je 4. 1 bod

Stoga je najmanji prirodan broj n s traženim svojstvom jednak 69999. 1 bod

Zadatak A-1.5.

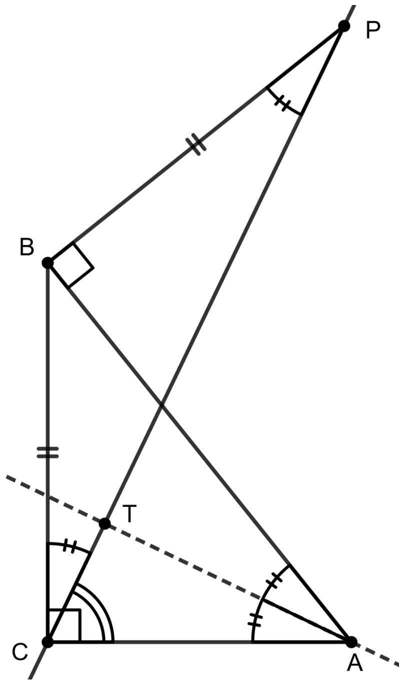
Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka je P točka takva da je kut $\sphericalangle ABP$ pravi, da vrijedi $|BP| = |BC|$ te da su točke P i C na suprotnim stranama pravca AB. Dokaži da je pravac CP okomit na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$.

Rješenje.

Neka je točka T presjek pravca CP i simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ te neka je $\alpha = \sphericalangle CAB$. Tada je

$$\sphericalangle CAT = \frac{\alpha}{2}.$$ 1 bod

Također, kako je trokut ABC pravokutan, slijedi $\sphericalangle ABC = 90^\circ - \alpha$.



Za kut $\sphericalangle PBC$ vrijedi

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PBA + \sphericalangle ABC = 90^\circ + (90^\circ - \alpha) = 180^\circ - \alpha. \qquad \text{1 bod}$$

Promotrimo trokut PBC. Zbog $|BP| = |BC|$, jednakokračan je, pa imamo

$$\sphericalangle BCT = \sphericalangle CPB. \qquad \text{1 bod}$$

Ta dva kuta zbrojena sa $\sphericalangle PBC = 180^\circ - \alpha$ daju 180°, pa zaključujemo da je

$$\sphericalangle BCT = \sphericalangle CPB = \frac{\alpha}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Nadalje, imamo

$$\sphericalangle TCA = \sphericalangle BCA - \sphericalangle BCT = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

U trokutu CAT vrijedi

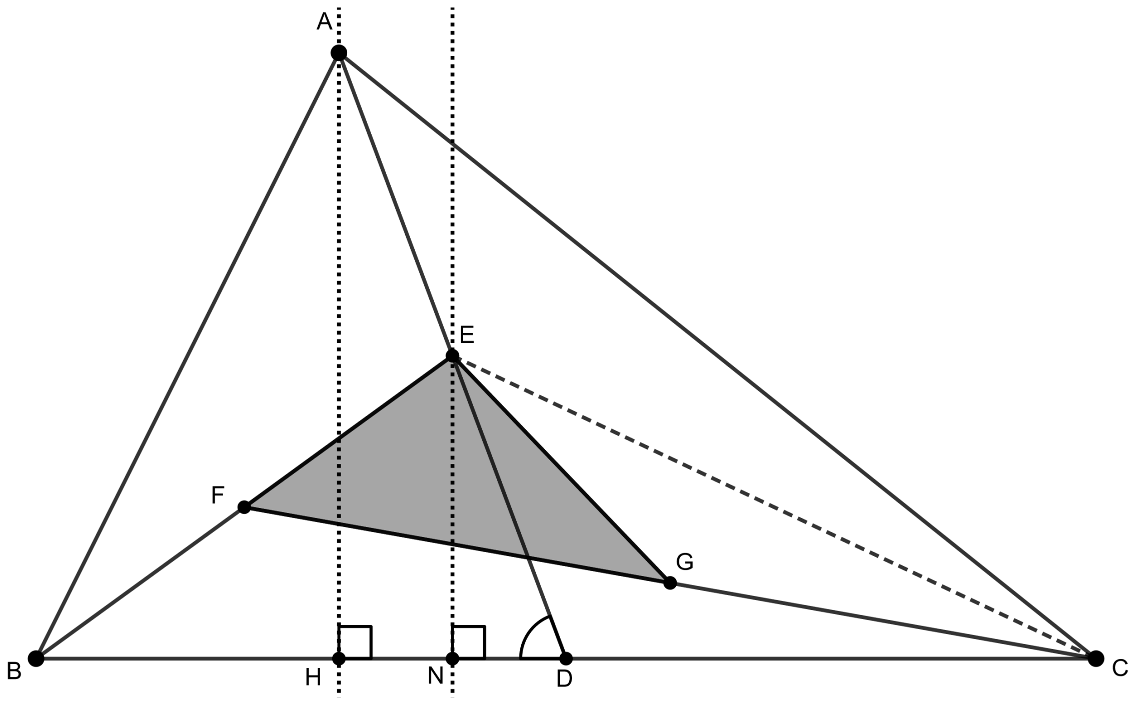
$$\sphericalangle CTA = 180^\circ - \sphericalangle TCA - \sphericalangle CAT = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ, \qquad \text{1 bod}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-1.6.

Dan je trokut ABC površine 1. Točka D polovište je dužine $\overline{BC}$, točka E polovište je dužine $\overline{AD}$, točka F polovište je dužine $\overline{BE}$ te je točka G polovište dužine $\overline{CF}$. Odredi površinu trokuta EFG.

Prvo rješenje.



Neka $P(XYZ)$ označava površinu proizvoljnog trokuta XYZ.

Neka je v_b duljina visine iz vrha B u trokutu ABD. Ta visina poklapa se s visinom iz vrha B u trokutu BDE, pa je

$$P(BDE) = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot v_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AD|}{2} \cdot v_b = \frac{1}{2} P(ABD).$$ 2 boda

Analogno zaključujemo da je $P(CDE) = \frac{1}{2} P(ADC)$. 2 boda

Zato je

$$P(BEC) = P(BDE) + P(CDE) = \frac{P(ABD) + P(ADC)}{2} = \frac{P(ABC)}{2} = \frac{1}{2}.$$ 2 boda

Ako je v_c duljina visine iz vrha C u trokutu BCE (i trokutu CFE), sličnim promatranjem kao ranije zaključujemo

$$P(CFE) = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{|BE|}{2} \cdot v_c = \frac{1}{2} P(BCE) = \frac{1}{4}.$$ 2 boda

Konačno, ako je v_e duljina visine iz vrha E u trokutu EFC (i trokutu EFG), dobivamo

$$P(EFG) = \frac{1}{2} \cdot |FG| \cdot v_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{|CF|}{2} \cdot v_e = \frac{1}{2} P(EFC) = \frac{1}{8}.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Neka su M i N sjecišta pravca BC s njemu okomitim pravcima kroz A i E, redom.

Trokutima AMD i END je kut $\sphericalangle BDA$ zajednički, a kutovi pri vrhovima M i N pravi, pa su slični prema K–K poučku o sličnosti. 2 boda

Zato je $|EN| : |AM| = |ED| : |AD| = 1 : 2$. 2 boda

Površina trokuta EBC je zato

$$P(EBC) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |EN| = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot \frac{|AM|}{2} = \frac{1}{2} P(ABC) = \frac{1}{2}.$$ 2 boda

Dalje nastavljamo kao u prošlom rješenju. 4 boda

Zadatak A-1.7.

Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka jednak 900 ?

Rješenje.

Rastav broja 900 na proste faktore je $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Među dekadskim znamenkama različitim od nule samo je znamenka pet djeljiva s 5, tako da točno dvije znamenke promatranog peteroznamenkastog broja moraju biti 5. 2 boda

Postoji $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ načina kako dvije znamenke 5 možemo rasporediti na neke od pet pozicija u peteroznamenkastom broju. 2 boda

U peteroznamenkastom broju sada treba odrediti preostale tri znamenke koje u umnošku daju $2^2 \cdot 3^2 = 36$ i rasporediti ih na tri preostala mjesta.

Primijetimo da $2^2 \cdot 3^2 = 36$ možemo na 5 načina rastaviti kao umnožak tri znamenke:

$$1 \cdot 4 \cdot 9, \qquad 2 \cdot 3 \cdot 6, \qquad 1 \cdot 6 \cdot 6, \qquad 2 \cdot 2 \cdot 9, \qquad 3 \cdot 3 \cdot 4.$$ 1 bod

U prva dva slučaja sve tri znamenke su različite, pa je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ različitih načina za razmjestiti te tri znamenke na preostala mjesta. 2 boda

U zadnja tri slučaja imamo tri znamenke od kojih su dvije jednake. Određivanjem jednog od tri mjesta na kojem upisujemo jedinstvenu znamenku jednoznačno određujemo mjesta preostalim (jednakim) znamenkama. Zato u ovim slučajevima postoje 3 različita razmještaja tih znamenaka. 3 boda

Stoga, zaključujemo da je ukupan broj peteroznamenkastih brojeva s traženim svojstvom

$$10 \cdot (2 + 2 + 3 + 3 + 3) = 210.$$

Napomena: Svaki od 5 slučajeva u gornjem rješenju nosi po 1 bod, koji odgovaraju zadnjim pet bodovima gornje bodovne sheme.

Ako učenici ne promatraju znamenke 5 odvojeno, već svedu problem na slučajeve

$$1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5, \qquad 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5, \qquad 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5, \qquad 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5, \qquad 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5,$$

svaki od tih slučajeva nosi 2 boda.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve realne brojeve k za koje se tjeme parabole s jednadžbom

$$y = 4x^2 - 4(k+1)x + k^2 + 4k - 1$$

nalazi na paraboli čija je jednadžba $y = 4x^2 - 2x - 8$.

Rješenje.

Jednadžbu parabole $y = 4x^2 - 4(k+1)x + k^2 + 4k - 1$ zapišimo u tjemenom obliku.

$$\begin{aligned} y &= 4\left(x^2 - 4(k+1)x + \left(\frac{k+1}{2}\right)^2\right) - 4\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + k^2 + 4k - 1 = \\ &= 4\left(x - \frac{k+1}{2}\right)^2 - (k+1)^2 + k^2 + 4k - 1 = \\ &= 4\left(x - \frac{k+1}{2}\right)^2 + 2k - 2. \end{aligned}$$

2 boda

Dakle, koordinate tjemena su

$$x_0 = \frac{k+1}{2}, \quad y_0 = 2k - 2.$$

1 bod

Uvrštavanjem u parabolu $y = 4x^2 - 2x - 8$ imamo

$$\begin{aligned} y_0 &= 4x_0^2 - 2x_0 - 8 \\ 2k - 2 &= 4\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - 2\frac{k+1}{2} - 8 \\ 2k - 2 &= (k+1)^2 - (k+1) - 8 \\ 2k - 2 &= k^2 + k - 8 \\ k^2 - k - 6 &= 0. \end{aligned}$$

2 boda

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su $k = 3$ i $k = -2$, pa su to ujedno i sve tražene vrijednosti realnog broja k. 1 bod

Napomena: Koordinate tjemena moguće je naći direktnim uvrštavanjem u formulu za tjeme kvadratne funkcije. Ako učenik odmah prema formuli napiše koordinate tjemena, za taj dio dobiva 3 boda.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve uređene parove cijelih brojeva (x, y) takve da je

$$x^2 + y^2 = 10(x + y).$$

Rješenje.

Sređivanjem izraza imamo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x - 10y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 + 25 &= 50 \\ (x-5)^2 + (y-5)^2 &= 50. \end{aligned}$$

2 boda

Jedine mogućnosti kako se broj 50 može prikazati kao zbroj dva kvadrata cijelih brojeva su $1 + 49$ te $25 + 25$. 1 bod

U prvom slučaju, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $(x - 5)^2 = 1$ i $(y - 5)^2 = 49$, odnosno $x - 5 = \pm 1$ i $y - 5 = \pm 7$. Slijedi da su rješenja $(x, y) = (6, 12)$, $(6, -2)$, $(4, 12)$ i $(4, -2)$. 1 bod

Zbog simetrije, rješenja su i $(x, y) = (12, 6)$, $(-2, 6)$, $(12, 4)$ i $(-2, 4)$. 1 bod

U drugom slučaju imamo $(x - 5)^2 = (y - 5)^2 = 25$, odnosno $x - 5 = \pm 5$, $y - 5 = \pm 5$. Slijedi da su rješenja $(x, y) = (10, 10)$, $(10, 0)$, $(0, 10)$ i $(0, 0)$. 1 bod

Napomena: Za sve bodove učenici moraju ispisati sva rješenja, uključujući i simetrična. Svih 12 mogućih rješenja ukupno vrijede 3 boda – ako učenici rješavaju drugačijim načinom ili pogađanjem, mogu dobiti

- 1 bod za barem 8 točno napisanih rješenja,
- 2 boda za barem 10 točno napisanih rješenja,
- 3 boda za svih 12 točno napisanih rješenja.

Zadatak A-2.3.

Za realne brojeve a i b jednadžba $x^2 + ax + b = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja (ne nužno različita). Dokaži da jednadžba $x^2 + 5ax + (6a^2 + b) = 0$ također ima dva cjelobrojna rješenja.

Prvo rješenje.

Neka su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$, a x_1' i x_2' rješenja jednadžbe $x^2 + 5ax + (6a^2 + b) = 0$.

Prema Vièteovim formulama vrijedi $a = -(x_1 + x_2)$, pa je i broj a cijeli. 1 bod

Prema formuli za rješenja kvadratne jednadžbe imamo

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

1 bod

te

$$
\begin{aligned}
x'_{1,2} &= \frac{-5a \pm \sqrt{25a^2 - 4(6a^2 + b)}}{2} \\
&= \frac{-5a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} && \text{1 bod} \\
&= \frac{-4a - a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\
&= -2a + x_{1,2}. && \text{2 boda}
\end{aligned}
$$

Time smo dokazali da su $x'_{1,2}$ zbrojevi cijelih brojeva $-2a$ i $x_{1,2}$, pa su zato i sami cijeli. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$, a x'_1 i x'_2 rješenja jednadžbe $x^2 + 5ax + (6a^2 + b) = 0$.

Prema Vièteovim formulama vrijedi $a = -(x_1 + x_2)$ i $b = x_1 x_2$, pa su i brojevi a i b cijeli. 1 bod

Prema formuli za rješenja kvadratne jednadžbe imamo

$$
x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \qquad \text{1 bod}
$$

te

$$
\begin{aligned}
x'_{1,2} &= \frac{-5a \pm \sqrt{25a^2 - 4(6a^2 + b)}}{2} \\
&= \frac{-5a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}. && \text{1 bod}
\end{aligned}
$$

Diskriminanta $d = a^2 - 4b$ je cijeli broj jer su a i b cijeli. Nadalje, da bi rješenja $x_{1,2}$ bila cjelobrojna, diskriminanta mora biti jednaka kvadratu cijelog broja. Dakle, postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $d = k^2$, odnosno

$$
k = \sqrt{d} = \sqrt{a^2 - 4b}. \qquad \text{1 bod}
$$

Kako su $x_{1,2} = \dfrac{a \pm k}{2}$ cijeli brojevi, brojevi a i k cijeli su brojevi iste parnosti. 1 bod

Zato su i brojevi $5a$ i k cijeli brojevi iste parnosti pa su i $x'_{1,2} = \dfrac{-5a \pm k}{2}$ cijeli brojevi, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Zadatak A-2.4.

Riješi nejednadžbu

$$
\frac{(1+x)^2}{1+y} \leqslant 1 + \frac{x^2}{y}.
$$

Za koje se parove (x, y) postiže jednakost?

Rješenje.

Zbog nazivnika, nužno imamo $y \neq 0$ i $y \neq -1$.

Sređivanjem početne nejednakosti i svođenjem na zajednički nazivnik imamo niz ekvivalentnih nejednakosti:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant 1 + \frac{x^2}{y} - \frac{(1+x)^2}{1+y} \\
0 &\leqslant \frac{y(y+1) + x^2(y+1) - (1+x)^2 y}{y(y+1)} && \text{1 bod} \\
0 &\leqslant \frac{y^2 + y + x^2 y + x^2 - y - 2xy - x^2 y}{y(y+1)} \\
0 &\leqslant \frac{y^2 + x^2 - 2xy}{y(y+1)} \\
0 &\leqslant \frac{(x-y)^2}{y(y+1)}. && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Za sve realne brojeve x, y vrijedi $(x-y)^2 \geqslant 0$. 1 bod

Razlikujemo dva slučaja ovisno o tome je li taj kvadrat jednak nuli, ili strogo veći od nule.

Ako je $(x-y)^2 = 0$, odnosno $x = y$, početna nejednakost je zadovoljena za sve dopuštene $x = y$, odnosno za $y \neq 0, -1$. Dakle, u ovom slučaju dobivamo rješenje

$$x = y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},$$

te se za sve takve x i y ujedno postiže i jednakost. 1 bod

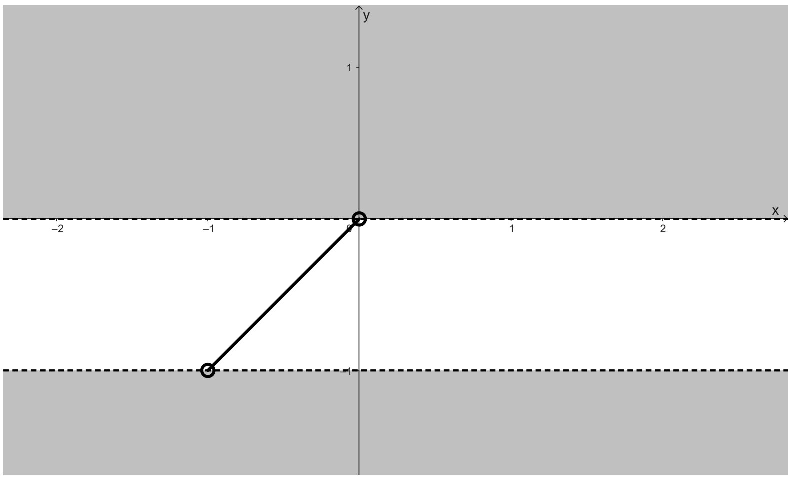
Ako je $(x-y)^2 > 0$ (odnosno $x \neq y$), ne postiže se jednakost u zadnjoj, pa onda ni u početnoj jednakosti. Da bi se postigla željena nejednakost, nužno je $y(y+1) > 0$. Analiziranjem kvadratne nejednadžbe, zaključujemo da mora vrijediti $y < -1$ ili $y > 0$. Vrijednost broja x u ovom slučaju bilo koja je vrijednost različita od y. 1 bod

Konačno zaključujemo da je rješenje nejednadžbe skup parova (x, y) za koje je $x = y$, gdje su oba broja x, y bilo koji realni broj osim -1 i 0, zajedno sa skupom svih parova (x, y) za koje je $x \neq y$, za koje je $y \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$. Jednakost se postiže kad su x, y međusobno jednaki, te različiti od -1 i 0.

Napomena: Učenici moraju jasno zapisati konačno rješenje nejednadžbe i slučaja jednakosti. To može biti zapisano kao u gornjem rješenju (riječima), grafički (vidjeti sliku) ili pomoću skupova. Jedan od načina zapisa rješenja nejednažbe pomoću skupova je

$$(x, y) \in \Big\{ (t, t) \ : \ t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \Big\} \ \cup \ \Big\{ (x, y) \ : \ x \in \mathbb{R}, \ y \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle \Big\}.$$

Sa slike vidimo da kod zapisa unije konačnih parova (x, y) koji zadovoljavaju nejednadžbu nije potrebno pisati da je $x \neq y$ u slučaju kada je $y \notin [-1, 0]$.

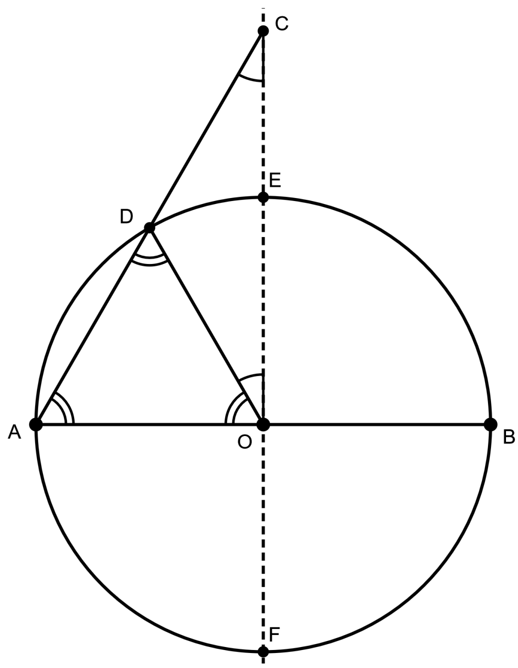


Umjesto slučajeva promatrana u službenom rješenju, dva slučaja koja se mogu promatrati su $y(y+1)>0$ i $y(y+1)<0$. Bodovanje je u tom slučaju analogno.

Zadatak A-2.5.

Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k, a točka O njezino središte. Neka je C točka izvan kružnice k na simetrali dužine $\overline{AB}$. Dužina $\overline{AC}$ siječe kružnicu k u točki D. Ako je $|AB|=2$ i $|CD|=1$, odredi $|OC|$.

Prvo rješenje.



Kako je $|OD|=|CD|=1$ (dužina $\overline{OD}$ polumjer je kružnice k), trokut OCD je jednakokračan pa vrijedi $\sphericalangle COD=\sphericalangle DCO$. 1 bod

Slično, zbog $|OA|=|OD|=1$ vrijedi da je trokut OAD jednakokračan i $\sphericalangle OAD=\sphericalangle ODA$. 1 bod

Kako je $\sphericalangle AOC=90^\circ$, slijedi $\sphericalangle AOD=90^\circ-\sphericalangle COD=90^\circ-\sphericalangle DCO$. 1 bod

S druge strane, iz pravokutnog trokuta AOC vrijedi $\sphericalangle OAC = 90^\circ - \sphericalangle DCO$ pa slijedi da je $\sphericalangle OAD = \sphericalangle AOD$. U trokutu AOD svi kutovi su jednaki, pa je jednakostraničan. 1 bod

Sada možemo zaključiti da vrijedi $|AD| = 1$, tj. $|AC| = 2$. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku za trokut AOC imamo $|OC| = \sqrt{|AC|^2 - |OA|^2} = \sqrt{3}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo s E i F točke u kojima OC siječe k, tako da je $|CE| < |CF|$. Posebno, $|EF| = 2$, budući da je ta dužina promjer kružnice k.

Uvedimo oznake $|AD| = x$, $|CE| = y$.

Promatranjem potencije točke C na kružnicu imamo

$$|CE| \cdot |CF| = |CD| \cdot |CA|,$$ 2 boda

$$y(y+2) = 1 \cdot (1+x).$$

Primjenom Pitagorinog poučka za trokut AOC imamo

$$|CO|^2 + |AO|^2 = |AC|^2,$$ 1 bod

$$(y+1)^2 + 1^2 = (1+x)^2.$$

Sređivanjem dobivenih jednadžbi dobivamo

$$(x+1)^2 = y^2 + 2y + 2 = y(y+2) + 2 = (1+x) + 2$$

$$x^2 + 2x + 1 = x + 3.$$

$$x^2 + x - 2 = 0.$$ 1 bod

Pozitivno rješenje dobivene kvadratne jednadžbe je $x = 1$. 1 bod

Iz $y(y+2) = 1 \cdot (1+x)$ slijedi jednadžba $y^2 + 2y - 2 = 0$, kojoj je jedino pozitivno rješenje $y = \sqrt{3} - 1$. Prema tome, $|OC| = 1 + y = \sqrt{3}$. 1 bod

Zadatak A-2.6.

Kažemo da je prirodni broj $n \geqslant 2$ *tajanstven* ako za svaki njegov djelitelj d veći od 1 vrijedi $d^2 + n \mid n^2 + d$. Odredi sve tajanstvene prirodne brojeve.

Rješenje.

Ako je n prost broj, u tom slučaju jedini djelitelj d veći od 1 je $d = n$. Tvrdnja u tom slučaju očito vrijedi, dakle svi prosti brojevi su tajanstveni. 2 boda

Pretpostavimo da je n tajanstven složen broj i neka je d neki njegov djelitelj različit od 1 i n. Iz uvjeta zadatka, broj

$$A = \frac{n^2 + d}{d^2 + n}$$

je prirodan.

Neka je $e = \dfrac{n}{d}$. Primijetimo da je to također djelitelj broja n veći od 1. 2 boda

Sređivanjem izraza A dobivamo

$$A = \frac{n^2 + d}{d^2 + n} = \frac{d^2 \cdot e^2 + d}{d^2 + d \cdot e} = \frac{d \cdot e^2 + 1}{d + e}.$$

Kako je e djelitelj broja n, prema uvjetu u zadatku vrijedi i da je broj

$$B = \frac{n^2 + e}{e^2 + n} = \frac{e \cdot d^2 + 1}{d + e}.$$

također prirodan. 2 boda

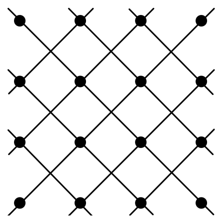
Zbroj brojeva A i B također mora biti prirodan broj:

$$A + B = \frac{d \cdot e^2 + 1}{d + e} + \frac{e \cdot d^2 + 1}{d + e} = \frac{d \cdot e \cdot (d + e) + 2}{d + e} = d \cdot e + \frac{2}{d + e}.$$ 2 boda

Zaključujemo da nužno vrijedi $d + e \mid 2$. Kako su i d i e brojevi koji su veći od 1, zaključujemo da je to nemoguće, čime smo dobili kontradikciju. Dakle, nijedan složeni broj nije tajanstven. 1 bod

Tajanstveni brojevi su točno svi prosti brojevi. 1 bod

Zadatak A-2.7.



Na slici je prikazan skup od 16 točaka raspoređenih na 10 istaknutih pravaca. Za dvije točke toga skupa kažemo da su *vezane* ako pripadaju istom istaknutom pravcu.

a) Koliko je najviše točaka promatranoga skupa moguće odabrati tako da među njima ne bude vezanih točaka?

b) Odredi broj podskupova promatranoga skupa točaka bez vezanih točaka s najvećim mogućim brojem elemenata.

Prvo rješenje.

Među istaknutim pravcima nazovimo 5 međusobno paralelnih pravaca redom p_1, p_2, p_3, p_4 i p_5. Analogno, pravce u drugom smjeru imenujemo s q_1, q_2, q_3, q_4 i q_5. Četiri točke koje se nalaze na točno jednom pravcu nazvat ćemo kutnima. Osam točaka koje se nalaze na pravcima p_1, p_5, q_1 i q_5 nazvat ćemo rubnima. Ostale četiri točke nazvat ćemo središnjima.

Promotrimo pravce p_1, p_2, p_3, p_4 i p_5. Na njima smije biti odabrano najviše 5 točaka, jer bi u suprotnom postojale barem dvije odabrane točke na istom pravcu. Na tih 5 pravaca ne nalaze se 2 (kutne) točke, no te dvije kutne točke nalaze se na istom pravcu q_3, pa od te dvije točke možemo odabrati najviše jednu. Zato je najveći broj točaka među kojima nema vezanih manji ili jednak 6. 2 boda

Dokazat ćemo da je taj broj jednak 6 i odredit ćemo broj odabira takvih točaka. Primijetimo da kako bi među šest odabranih točaka ne bi bilo vezanih, poštujući argumente s početka, po jedna se mora nalaziti na svakom od 5 paralelnih pravaca p_1, p_2, p_3, p_4 i p_5, te jedna od tih točaka mora biti kutna.

Kutnu točku koja se ne nalazi ni na jednom od pravaca p_i možemo odabrati na dva načina. 1 bod

Pogledajmo pravce p_1 i p_5. Imamo dva odabira za točku na pravcu na p_1. Svaka od tih točaka koju možemo odabrati pravcu leži na istom pravcu kao neka od dvije točke na pravcu p_5. Zato nakon odabira te točke na pravcu p_1, na jednoznačan način odabiremo točku na pravcu p_5. 2 boda

Pogledajmo pravce p_2 i p_4. Odabrana kutna točka nalazi se na pravcu na q_3, pa zato ne smijemo odabrati središnje točke na tim pravcima. 1 bod

Zato opet zapravo imamo samo dva odabira točke na pravcu p_2. Analogno kao u prošlom slučaju, ovisno o odabiru te točke, jednoznačno će biti određena točka na pravcu p_4. 1 bod

Konačno, na pravcu p_3 ne možemo odabrati središnju točku jer bi bila vezana s onim točkama koje smo odabrali na pravcima p_1 i p_5. 1 bod

Zato možemo odabrati samo neku od dviju kutnih točaka (na dva načina). 1 bod

Ukupan broj podskupova umnožak je svih mogućnosti odabira, i iznosi $2^4 = 16$. 1 bod

Drugo rješenje.

Nazovimo točke i pravce kao u prošlom rješenju.

Obojimo točke na pravcima p_1, p_3 i p_5 u crno, a ostale točke u bijelo. Primijetimo da nikoje dvije točke različite boje ne pripadaju istom pravcu. Nadalje, primijetimo da su crne i bijele točke međusobno simetrične (os simetrije je pravac paralelan sa stranicama kvadrata koji čine tih 16 točaka i prolazi središtem tog kvadrata). Zato je u ovom zadatku dovoljno gledati točke samo jedne boje. 2 boda

Najveći broj točaka koji možemo odabrati jednak je dvostrukom broju crnih točaka koje možemo odabrati. Nadalje, ukupan broj podskupova s najvećim brojem elemenata jednak je kvadratu broja podskupova s najvećim brojem crnih elemenata.

Kako se sve crne točke nalaze na tri pravca. Zato možemo odabrati najviše 3 crne točke koje nisu vezane, a onda to znači da možemo odabrati ukupno najviše 6 točaka tako da nikoje dvije nisu vezane. 2 boda

Prebrojimo sada sve moguće odabire 3 vezane crne točke. Nužno je da na svakom od pravaca p_1, p_3 i p_5 odaberemo točno jednu točku.

Pogledajmo pravce p_1 i p_5. Imamo dva odabira za točku na pravcu na p_1. Svaka od tih točaka koju možemo odabrati pravcu leži na istom pravcu kao neka od dvije točke na pravcu p_5. Zato nakon odabira te točke na pravcu p_1, na jednoznačan način odabiremo točku na pravcu p_5. 2 boda

Promotrimo sada pravac p_3. Na njemu ne možemo odabrati središnje točke jer bi one bile vezane s onim točkama koje smo odabrali na pravcima p_1 i p_5. 2 boda

Zato na pravcu p_3 možemo odabrati samo jednu od dviju kutnih točaka (na dva načina). 1 bod

Ukupan broj odabira crnih točaka među kojima nema vezanih zato je jednak $2^2 = 4$, a onda ukupan odabir šest točaka među kojima nema vezanih jednak je $4^2 = 16$. 1 bod

Napomena: Bodovanje službenih pa time i ostalih rješenja prati sljedeće ideje:

- Dokaz da najveći broj odabranih točaka među kojima nema vezanih nije veći od 6 nosi 2 boda. Odgovor da je taj broj jednak 6 bez dokaza nosi 1 bod od ta 2 boda.
- Odgovor da je broj odabira podskupova iz drugog podzadatka nosi 1 bod.
- Dokaz da nijedna od središnjih točaka ne može biti odabrana nosi 2 boda (ili dvaput po 1 bod, ovisno o pristupu rješavanja – kako je i napravljeno u prvom službenom rješenju). Ovisno o redoslijedu dokazivanja, to se može dokazati tako što se koriste kutne točke, rubne točke ili sve.
- Dokaz da odabir točaka p_1 određuje odabir točaka na p_5, te da je broj odabira točaka na tim pravcima jednak 2 analogan je dokazu da odabir točaka na p_2 određuje odabir točaka na p_4 (nakon što je dokazano i bodovano da središnje točke ne smiju biti među odabranima), te da je broj odabira točaka na tim pravcima jednak 2. Prvi od tih dvaju dokaza koji učenici napišu vrijedi 2 boda, a drugi 1 bod.
- Svaki od odabira kutnih točaka ili točaka na pravcu p_3 (nakon što je dokazano i bodovano da središnje točke ne smiju biti među odabranima) nosi po 1 bod.
- Uvođenje bojanja 16 točaka u dvije boje uz opravdanje da je dovoljno gledati točke samo jedne boje nosi 2 boda.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi sva realna rješenja nejednadžbe

$$\log_9 x^2 - \log_3(x+8) \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 1.$$

Rješenje.

Da bi vrijednosti logaritama u početnoj nejednadžbi bile dobro definirane mora vrijediti $x^2 > 0$ (odnosno $x \neq 0$), $x + 8 > 0$ (odnosno $x > -8$) i $x - 3 > 0$ ($x > 3$).

Presjek svih uvjeta daje početni uvjet nejednadžbe $x > 3$. 1 bod

Svedimo sve logaritme u nejednadžbi na bazu 3:

$$\log_9 x^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_3 x = \log_3 x,$$
$$\log_{\frac{1}{3}}(x-3) = -\log_3(x-3).$$

Uvrštavanjem gornjih izraza i sređivanjem početne nejednadžbe imamo

$$\log_3 x - \log_3(x+8) \leqslant -\log_3(x-3) - 1$$
$$\log_3 x + \log_3(x-3) + 1 \leqslant \log_3(x+8)$$
$$\log_3(3x \cdot (x-3)) \leqslant \log_3(x+8).$$ 1 bod

Kako je baza logaritma 3 veća od 1, dalje imamo

$$3x \cdot (x-3) \leqslant x + 8$$ 1 bod
$$3x^2 - 9x \leqslant x + 8$$
$$3x^2 - 10x - 8 \leqslant 0.$$ 1 bod

Rješenje dobivene kvadratne nejednadžbe je $x \in \left[-\frac{2}{3}, 4\right]$. 1 bod

Uzimajući u obzir početni uvjet $x > 3$, konačno rješenje je $x \in \langle 3, 4]$. 1 bod

Zadatak A-3.2.

Ako je $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2} = \dfrac{4}{9}$, odredi $\sin x \cos x$.

Rješenje.

Korištenjem identiteta $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$, izraze u brojniku i nazivniku možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 1 &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} + 1 \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} + 1 = \frac{1 + \sin x \cos x}{\sin x \cos x},\end{aligned}$$ 1 bod

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}.\end{aligned}$$ 1 bod

Uvrštavanjem u početni uvjet i sređivanjem dobivamo

$$\frac{4}{9} = \sin x \cos x (1 + \sin x \cos x).$$ 1 bod

Supstitucijom $t = \sin x \cos x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $t^2 + t - \frac{4}{9} = 0$. 1 bod

Njezina rješenja su $t_1 = \frac{1}{3}$ i $t_2 = -\frac{4}{3}$. 1 bod

Kako je $|t| = |\sin x \cos x| \leqslant 1$, nije moguće $t = -\frac{4}{3}$. Konačno zaključujemo da je $t = \sin x \cos x = \frac{1}{3}$. 1 bod

Zadatak A-3.3.

Dan je trokut ABC površine 5. Ako za duljine stranica toga trokuta vrijedi jednakost $|AB|^2 + |AC|^2 = 17 + |BC|^2$, odredi tangens kuta $\sphericalangle CAB$.

Rješenje.

Neka su a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom, te neka je α mjera kuta pri vrhu A.

Korištenje formule za površinu trokuta pomoću sinusa kuta daje

$$5 = P(ABC) = \frac{1}{2} bc \sin \alpha,$$ 1 bod

odakle slijedi $\sin \alpha = \frac{10}{bc}$. 1 bod

Primjenom poučka o kosinusu na trokut ABC vrijedi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$ 1 bod

odakle slijedi

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{17}{2bc},$$ 1 bod

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti koristili uvjet zadatka $b^2 + c^2 = 17 + a^2$.

Konačno je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{10}{bc} \cdot \frac{2bc}{17} = \frac{20}{17}.$$ 2 boda

Zadatak A-3.4.

Na školskome natjecanju iz matematike sudjelovalo je 1200 učenika. Broj bodova koje učenik može ostvariti cijeli je broj između 0 i 50. Računalnom greškom svim je učenicima koji su ostvarili 3 ili manje bodova zapisan rezultat 0 bodova, a svim učenicima koji su ostvarili 47 ili više bodova zapisano je 50 bodova. Zbog te greške prosječni rezultat na natjecanju prema podatcima u računalu veći je za 0.1 od stvarnog.

Dokaži da postoje brojevi a i b takvi da se broj učenika koji su ostvarili točno a bodova i broj učenika koji su ostvarili točno b bodova razlikuje za najmanje 20.

Rješenje.

Označimo sa S ukupan zbroj bodova svih učenika na natjecanju te sa x_i broj učenika koji je ostvario točno i bodova na natjecanju za $i = 0, 1, \ldots, 50$.

Potrebno je dokazati da postoje $a, b \in \{0, 1, \ldots, 50\}$ takvi da je $x_a - x_b \geqslant 20$.

Prosječni broj bodova na natjecanju prije računalne greške iznosi $\frac{S}{1200}$.

Nakon računalne greške učenicima koji su ostvarili 1, 2 ili 3 boda je umjesto toga zapisano 0 bodova. Ta promjena ukupan zbroj bodova smanjuje za $x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Slično, učenicima koji su ostvarili 47, 48 ili 49 boda je umjesto toga zapisano 50 bodova. Ta promjena ukupan zbroj bodova povećava za

$$(50 - 47)x_{47} + (50 - 48)x_{48} + (50 - 49)x_{49} = 3x_{47} + 2x_{48} + x_{49}.$$

Dakle, prosječan broj bodova na natjecanju poslije računalne greške iznosi

$$\frac{S - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_{49} + 2x_{48} + 3x_{47}}{1200}.$$ 1 bod

Iz uvjeta zadatka znamo da vrijedi

$$\frac{S}{1200} + 0.1 = \frac{S - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_{49} + 2x_{48} + 3x_{47}}{1200},$$ 1 bod

odakle sređivanjem dobivamo

$$(x_{49} - x_1) + 2(x_{48} - x_2) + 3(x_{47} - x_3) = 120.$$ 1 bod

Pretpostavimo da su sve razlike $x_{49} - x_1$, $x_{48} - x_2$, $x_{47} - x_3$ manje od 20. Tada vrijedi

$$120 = (x_{49} - x_1) + 2(x_{48} - x_2) + 3(x_{47} - x_3) < 20 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 120,$$

odakle dobivamo kontradikciju. 2 boda

Dakle barem jedna od razlika $x_{49} - x_1$, $x_{48} - x_2$, $x_{47} - x_3$ iznosi barem 20, a time je dokazana i tvrdnja zadatka. 1 bod

Zadatak A-3.5.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je vrijednost izraza

$$\frac{n^2 - 22 + \log_2 n}{n-5}$$

cijeli broj.

Rješenje.

Početni razlomak možemo zapisati na sljedeći način

$$\frac{n^2 - 22 + \log_2 n}{n-5} = \frac{n^2 - 25 + \log_2 n + 3}{n-5} = n + 5 + \frac{\log_2 n + 3}{n-5}.$$ 1 bod

Budući da je $n+5$ cijeli broj, da bi gornji razlomak bio cijeli broj onda i razlomak $\frac{\log_2 n + 3}{n-5}$ mora biti cijeli broj. 1 bod

Posebno, broj $k := \log_2 n$ u brojniku tog razlomka mora biti racionalan broj. Kako je broj $n = 2^k$ prirodan, to je moguće samo ako je k nenegativan cijeli broj. 1 bod

Uvrštavanjem $n = 2^k$ slijedi da

$$\frac{\log_2 n + 3}{n-5} = \frac{k+3}{2^k - 5}$$

mora biti cijeli broj.

Provjerom slučajeva $k = 0$, 1, 2 i 3 dobijemo da je razlomak $\frac{k+3}{2^k-5}$ cijeli broj jedino za $k = 2$ i $k = 3$. 1 bod

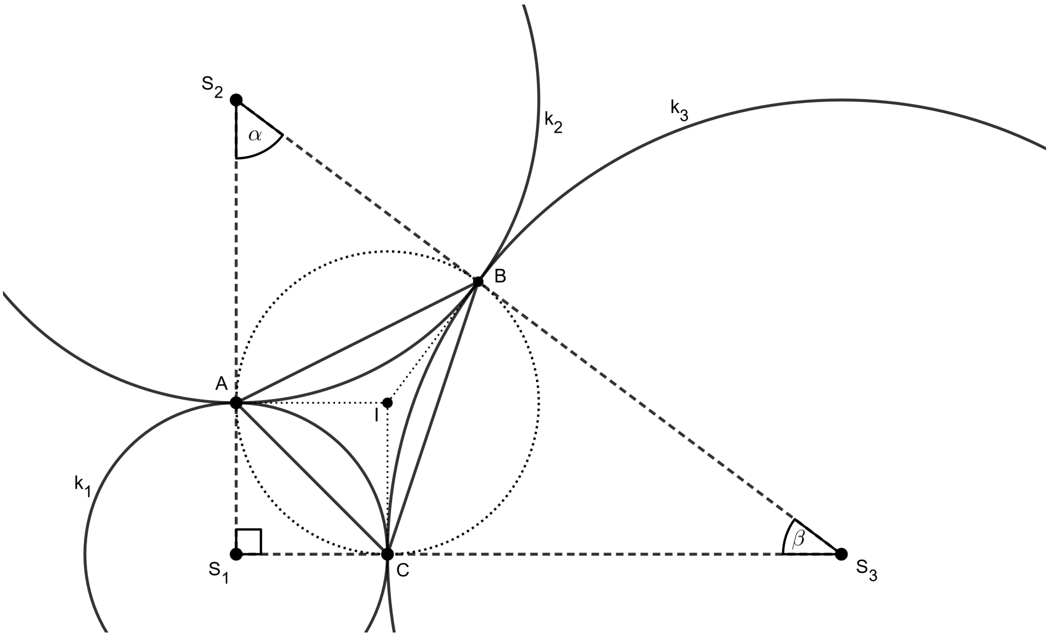
Za $k \geqslant 4$ je $2^k - 5 > k+3$ (jer eksponencijalna funkcija brže raste od linearne funkcije), pa u tom slučaju gornji razlomak nikako ne može biti cijeli broj. 1 bod

Dakle, $n = 2^2 = 4$ i $n = 2^3 = 8$ su jedina rješenja za koje je početni razlomak cijeli broj. 1 bod

Zadatak A-3.6.

Kružnice k_1, k_2 i k_3 sa središtima S_1, S_2, S_3 i polumjerima duljina $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, redom međusobno se dodiruju izvana tako da je A diralište kružnica k_1 i k_2, B diralište kružnica k_2 i k_3 te C diralište kružnica k_3 i k_1. Odredi površinu trokuta ABC.

Prvo rješenje.



Kružnice k_1, k_2 i k_3 se međusobno diraju izvana, stoga je $|S_1S_2| = r_1 + r_2 = 3$, $|S_2S_3| = r_2 + r_3 = 5$ i $|S_3S_1| = r_3 + r_1 = 4$.

Uočimo da je trokut $S_1S_2S_3$ trokut sa stranicama duljina 3, 4 i 5. Prema obratu Pitagorinog poučka trokut $S_1S_2S_3$ je pravokutan. 2 boda

Označimo s α i β redom mjere kutova $\sphericalangle S_1S_2S_3$ i $\sphericalangle S_1S_3S_2$.

Budući da je trokut $S_1S_2S_3$ pravokutan, vrijedi $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin\beta = \frac{3}{5}$.

Trokuti $S_1S_2S_3$ i CAS_1 su pravokutni pa imamo

$$P(S_1S_2S_3) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6,$$ 1 bod

$$P(CAS_1) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$ 1 bod

Površinu trokuta ABS_2 i BCS_3 možemo odrediti preko formule za površinu trokuta pomoću sinusa kuta

$$P(ABS_2) = \frac{1}{2} r_2^2 \sin\alpha = \frac{8}{5},$$ 2 boda

$$P(BCS_3) = \frac{1}{2} r_3^2 \sin\beta = \frac{27}{10}.$$ 2 boda

Sada konačno možemo odrediti površinu trokuta ABC

$$P(ABC) = P(S_1S_2S_3) - P(CAS_1) - P(ABS_2) - P(BCS_3) = \frac{6}{5}.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je $|S_1S_2| = 3$, $|S_2S_3| = 5$ i $|S_3S_1| = 4$. Također, neka je α mjera kuta $\sphericalangle S_1S_2S_3$. Kao u prošlom rješenju, površina P trokuta $S_1S_2S_3$ iznosi 6 (možemo je izračunati Heronovom formulom ili uočavanjem i korištenjem da je trokut pravokutan). 3 boda

Primjenom formule za površinu trokuta pomoću sinusa kuta imamo

$$\frac{P(ABS_2)}{P} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \sin\alpha} = \frac{4}{15},$$ 1 bod

iz čega slijedi da je $P(ACS_1) = \dfrac{4}{15}P = \dfrac{8}{5}$. 1 bod

Analogno dobijemo $P(CAS_1) = \dfrac{1}{2}$ i $P(BCS_3) = \dfrac{27}{10}$. 3 boda

Sada konačno možemo odrediti površinu trokuta ABC

$$P(ABC) = P(S_1S_2S_3) - P(CAS_1) - P(ABS_2) - P(BCS_3) = \frac{6}{5}.$$ 2 boda

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju, trokut $S_1S_2S_3$ je pravokutan sa stranicama duljina 3, 4 i 5, a α i β mjere kutova $\sphericalangle S_1S_2S_3$ i $\sphericalangle S_1S_3S_2$. 2 boda

Neka su a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom.

Budući da je trokut $S_1S_2S_3$ pravokutan, vrijedi $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ i $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut AS_1C dobivamo

$$b^2 = |AC|^2 = |AS_1|^2 + |S_1C|^2 = 2.$$ 1 bod

Primjenom poučka o kosinusu na trokut ABS_2 dobivamo

$$c^2 = |AB|^2 = |AS_2|^2 + |S_2B|^2 - 2 \cdot |AS_2| \cdot |S_2B| = 2 \cdot 2^2 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{16}{5}.$$ 1 bod

Analogno, primjenom poučka o kosinusu na trokut BCS_3 dobivamo

$$a^2 = |BC|^2 = \frac{18}{5}.$$ 1 bod

Neka je I središte upisane kružnice trokuta $S_1S_2S_3$, a A', B' i C' dirališta te upisane kružnice sa stranicama $\overline{S_1S_2}$, $\overline{S_2S_3}$ i $\overline{S_3S_1}$ redom.

Trokuti $A'S_2I$ i $B'S_2I$ su pravokutni trokuti koji dijele hipotenuzu i po jedna kateta im je iste duljine kao radijus upisane kružnice trokuta $S_1S_2S_3$. Zato su ti trokuti sukladni, pa posebno vrijedi $|A'S_2| = |B'S_2|$.

Slično zaključujemo da je $|A'S_1| = |C'S_1|$ i $|C'S_3| = |B'S_3|$. Isto vrijedi i za točke A, B i C, a to je moguće samo ako je $A \equiv A'$, $B \equiv B'$ i $C \equiv C'$.

Ovime zaključujemo da je upisana kružnica trokuta $S_1S_2S_3$ upravo opisana kružnica trokutu ABC. 3 boda

Kako je četverokut $CIAS_1$ kvadrat, radijus te kružnice je $R = |IA| = |AS_1| = 1$. 1 bod

Konačno, površinu trokuta ABC možemo izračunati koristeći formulu preko radijusa opisane kružnice:

$$P = \frac{abc}{4R} = \frac{\sqrt{\frac{18}{5} \cdot 2 \cdot \frac{16}{5}}}{4 \cdot 1} = \frac{6}{5}.$$ 1 bod

Napomena: Rješenje u kojem je površina trokuta izražena ABC preko površine nekog drugog trokuta (npr. trokuta $S_1S_2S_3$), ali na kraju nije izračunata površina tog drugog trokuta ostvaruje 7 bodova.

U trećem rješenju nakon izračuna svih duljina stranica a, b i c moguće je primijeniti Heronovu formulu. Uvošenje Heronove formule vrijedi 1 bod, a točno izračunata površina korištenjem te formule vrijedi 4 boda. Tih 5 bodova nije aditivno sa zadnjih 5 bodova treće bodovne sheme.

Zadatak A-3.7.

Odredi proste brojeve p, q, r i prirodni broj n za koje vrijedi

$$p^2 = q^2 + r^n.$$

Nađi sva rješenja.

Prvo rješenje.

Kao prvo primijetimo da je nužno $p > q$.

Posebno, $p \geqslant 3$, pa je lijeva strana jednadžbe neparna. Zato je točno jedan od brojeva q i r paran, a jedan neparan. Kako je jedini paran prosti broj 2, imamo dva slučaja: $q = 2$ ili $r = 2$. 2 boda

Neka je prvo $q = 2$ i $r > 2$. Prebacivanjem q^2 na lijevu stranu jednadžbe i primjenom razlike kvadrata dobivamo

$$(p - 2)(p + 2) = r^n.$$ 1 bod

Kako je r prost, nužno je $p - 2 = r^a$ i $p + 2 = r^b$, za neke nenegativne cijele brojeve $a < b$ takve da je $a + b = n$.

Oduzumanjem tih jednadžbi, dobivamo

$$4 = r^b - r^a = r^a(r^{b-a} - 1).$$

Kako je r neparan, a r^a dijeli 4, zaključujemo da je nužno $a = 0$. 1 bod

Dalje slijedi $4 = r^b - 1$, odakle je $r = 5$, $b = 1$. Uvrštavanjem u bilo koju od gornjih jednakosti dobivamo jedno rješenje:

$$p = 3,\ q = 2,\ r = 5,\ n = 1.$$ 1 bod

Neka je sada $r = 2$ i $q > 2$. Promotrimo početnu jednadžbu modulo 3. Ako ni p ni q nisu jednaki 3, tada izrazi p^2 i q^2 daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3. Kako 2^n nije djeljivo

s 3, zaključujemo da početna jednadžba u tom slučaju nema rješenja. Dakle, jedan od brojeva p i q jednak je 3. 2 boda

Ako je $p = 3$, tada bi zbog $p > q$ nužno moralo biti $q = 2$, no dobivamo kontradikciju jer q mora biti neparan. Dakle, nužno je $q = 3$. 1 bod

Kao u prvom slučaju, u početnoj jednadžbi prebacimo q^2 na lijevu stranu i primijenimo razliku kvadrata:

$$(p-3)(p+3) = 2^n. \qquad \text{1 bod}$$

Ponovno zaključujemo da je $p - 3 = 2^a$ i $p + 3 = 2^b$, za neke nenegativne cijele brojeve $a < b$ takve da je $a + b = n$. Oduzimanjem dobivamo

$$6 = 2^a - 2^b = 2^a(2^{b-a} - 1).$$

Primijetimo da je nužno $a = 1$ (za $a = 0$ desna strana je neparna ili jednaka nuli, a za $a \geqslant 2$ desna strana je djeljiva s 4). Uvrštavanjem tog zaključka dobivamo $2^b = 8$, odakle je $b = 3$, odnosno $n = 4$. Iz bilo koje od preostalih jednadžbi dobivamo još jedno rješenje:

$$p = 5, \; q = 3, \; r = 2, \; n = 4. \qquad \text{1 bod}$$

Dakle, sva rješenja početne jednadžbe (p, q, r, n) su $(3, 2, 5, 1)$ i $(5, 3, 2, 4)$.

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju, prvo zaključujemo da je $p > q$.

Gledajući jednadžbu, možemo zaključiti da je

- barem jedan od brojeva p, q, r paran (ako su svi brojevi neparni, dobivamo da obje strane jednakosti nisu iste parnosti); 2 boda
- barem jedan od brojeva p, q, r djeljiv s 3 (ako p i q nisu djeljivi s 3, onda p^2 i q^2 daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3, pa r^n mora biti djeljiv s 3). 2 boda

Kako je 2 jedini paran prost broj, a 3 jedini prost broj djeljiv s 3, zaključujemo da je moguće šest slučajeva.

Slučajevi kada je (p, q, r) jednako $(2, 3, r)$ ili $(2, q, r)$ otpadaju zbog $p > q$. Isto je i sa slučajem $(p, q, r) = (3, q, 2)$, jer q ne može biti jednak 2 gledajući parnosti jednadžbe. 1 bod

Slučaj $(p, q, r) = (3, 2, r)$ vodi na jednadžbu $r^n = 5$, gdje dobivamo rješenje $p = 3$, $q = 2$, $r = 5$, $n = 1$. 1 bod

Slučaj $(p, q, r) = (p, 3, 2)$ rješavamo kao u prvom rješenju, i dobivamo rješenje $p = 5$, $q = 3$, $r = 2$, $n = 4$. 2 boda

Slučaj $(p, q, r) = (p, 2, 3)$ rješava se analogno, no ne dobivamo rješenje. 2 boda

Dakle, sva rješenja početne jednadžbe (p, q, r, n) su $(3, 2, 5, 1)$ i $(5, 3, 2, 4)$.

Napomena: Bodovanje službenih pa time i ostalih rješenja prati sljedeće ideje:

- Pronalazak svakog od rješenja početne jednadžbe, makar bez dokaza, nosi po 1 bod. Taj bod se ne zbraja s dijelovima dokaza gornjih rješenja u kojima se ta rješenja pronađu.
- Svaki od zaključaka da je jedan od p, q, r paran, odnosno djeljiv s 3 nosi 2 boda.
- Rješavanje slučaja $p^2 = q^2 + r^n$ koji se ne može trivijalno riješiti koristeći zaključak $p > q$ u kojima su vrijednosti za q i r poznate (npr. jednadžbe $p^2 = 4 + 3^n$ i $p^2 = 9 + 2^n$) nosi 2 boda, koji se mogu rastaviti na po 1 bod kao u prvom rješenju.
- Rješavanje slučaja $p^2 = q^2 + r^n$ koji se ne može trivijalno riješiti koristeći zaključak $p > q$ u kojima je vrijednost za q poznata (npr. jednadžbe $p^2 = 4 + r^n$ ili $p^2 = 9 + r^n$) nosi 3 boda, koji se mogu rastaviti na po 1 bod kao u prvom rješenju.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Djevojke Marija i Magdalena igraju šahovski meč u tri partije. Vjerojatnosti da Marija u pojedinoj partiji pobijedi, izgubi ili da partija završi remijem međusobno su jednake. Ukupna pobjednica meča djevojka je koja ostvari više pobjeda (u tri partije), a ako budu imale jednak broj pobjeda, meč završava neodlučenim rezultatom.

Kolika je vjerojatnost da Marija bude ukupna pobjednica meča?

Prvo rješenje.

Vjerojatnost svakog od događaja (Magdalenina pobjeda, Marijina pobjeda ili neodlučeni ishod) iznosi $\frac{1}{3}$.

Dvoboj će završiti Marijinom pobjedom u sljedećim slučajevima:

- Marija je pobijedila u sve tri partije;
- Marija je pobijedila u točno dvije partije;
- Marija je pobijedila u jednoj partiji, a ostale dvije su završile neodlučeno. 2 boda

U prvom slučaju vjerojatnost je $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.

U drugom slučaju na tri načina odaberemo partiju u kojoj Marija nije pobijedila, a nakon toga imamo dva izbora za tu partiju, neodlučeno ili Magdalenina pobjeda. Stoga je vjerojatnost u ovom slučaju jednaka $\frac{6}{27}$. 2 boda

U trećem slučaju na tri načina odaberemo partiju u kojoj je Marija pobijedila. Stoga je vjerojatnost u ovom slučaju jednaka $\frac{3}{27}$. 1 bod

Dakle, ukupna vjerojatnost Marijine pobjede je $\frac{1}{27} + \frac{6}{27} + \frac{3}{27} = \frac{10}{27}$.

Drugo rješenje.

Kako su sve vjerojatnosti jednake $\frac{1}{3}$, vjerojatnost da pobijedi Marija (p) jednaka je vjerojatnosti da pobijedi Magdalena. Te dvije vjerojatnosti zajedno s vjerojatnosti da bude neodlučeno (q) daju 1 pa vrijedi $2p + q = 1$. 1 bod

Odredimo vjerojatnost q. Meč će završiti neodlučenim rezultatom ako je neparno mnogo partija završilo neodlučeno, a Marija i Magdalena jednako mnogo puta pobijedile u preostalima. 2 boda

Prvi slučaj je da su sve tri partije završile neodlučeno i vjerojatnost za to je $\frac{1}{27}$. 1 bod

Drugi slučaj je da je jedna partija završila neodlučeno, jedna Marijinom pobjedom i jedna Magdaleninom pobjedom. Na tri načina odaberemo koja je partija završila neodlučeno, nakon toga imamo dva izbora za Marijinu pobjedu. Ukupno je dakle 6 izbora, pa je vjerojatnost u ovom slučaju jednaka $\frac{6}{27}$. 2 boda

Ukupno je zato $q = \frac{7}{27}$, te konačno $p = \frac{10}{27}$, što je vjerojatnost ukupne Marijine pobjede. 1 bod

Napomena: U prvom prikazanom rješenju moguća je greška ako se u drugom slučaju gleda da je Marija pobjedila u barem dvije partije, odnosno ako se slučaj kada je Marija pobijedila u sve tri partije broji dvaput. U tom slučaju rješenje gubi prva 2 boda iz prve bodovne sheme.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve uređene parove (p, n), pri čemu je p prost, a n prirodan broj za koje vrijedi

$$1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n = 2801.$$

Prvo rješenje.

Jednadžbi $1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n = 2801$ oduzmemo 1 s obje strane. Budući da je $p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n = p \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1}$, dobivamo jednadžbu

$$p \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1} = 2800.$$ 1 bod

Uočimo da je lijeva strana djeljiva s p pa je p jedan od prostih djelitelja broja 2800. Dakle, p mora biti 2, 5 ili 7. 2 boda

Ako je $p = 2$, jednadžba postaje $2^n - 1 = 1400$. Ta jednadžba nema rješenja u prirodnim brojevima pa ovaj slučaj nije moguć. 1 bod

Ako je $p = 5$, jednadžba postaje $\frac{5^n - 1}{4} = 560$, odnosno $5^n = 2241$. Ta jednadžba nema rješenja u prirodnim brojevima pa ni ovaj slučaj nije moguć. 1 bod

Ako je $p = 7$, jednadžba postaje $\frac{7^n - 1}{6} = 400$, odnosno $7^n = 2401$. Odavde slijedi da je $n = 4$. Stoga je jedino rješenje polazne jednadžbe $(p, n) = (7, 4)$. 1 bod

Drugo rješenje.

Jednadžbi ponovno $1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n = 2801$ oduzmemo 1 s obje strane, a s lijeve strane izlučimo p:

$$p \cdot (1 + p + \cdots + p^{n-1}) = 2800.$$ 1 bod

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je p jednak 2, 5 ili 7. 2 boda

U slučaju $p = 2$ lijeva strana jednadžbe djeljiva je s 2, ali nije s 4. Budući da je 2800 djeljivo s 4, u ovom slučaju nemamo rješenja. 1 bod

U slučaju $p = 5$ lijeva strana jednadžbe djeljiva je s 5, ali nije s 5. Budući da je 2800 djeljivo s 25, ni u ovom slučaju nemamo rješenja. 1 bod

U slučaju $p = 7$ dobivamo

$$1 + 7 + \cdots + 7^{n-1} = 400.$$

Za $n = 4$ dobivamo rješenje. Za manje n lijeva strana je manja od 2800, a za veće je veća od 2800, pa je to jedino rješenje. 1 bod

Jedino rješenje početne jednadžbe je $(p, n) = (7, 4)$.

Zadatak A-4.3.

Neka je (a_n) niz definiran s $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \quad \text{za } n \geqslant 3.$$

Dokaži da vrijedi $a_{2024} \geqslant \sqrt{2024!}$.

Rješenje.

Koristeći princip matematičke indukcije dokazat ćemo da vrijedi $a_n \geqslant \sqrt{n!}$ za svaki prirodni broj n. 1 bod

Baza indukcije je očito zadovoljena jer za $n = 1$ i $n = 2$ imamo $a_1 = 1 \geqslant \sqrt{1!}$ i $a_2 = 2 \geqslant \sqrt{2} = \sqrt{2!}$. 1 bod

Pretpostavimo da vrijedi za $n-2$ i $n-1$, odnosno da vrijedi $a_{n-2} \geqslant \sqrt{(n-2)!}$ i $a_{n-1} \geqslant \sqrt{(n-1)!}$. 1 bod

Tada je

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \geqslant \sqrt{(n-1)!} + (n-1)\sqrt{(n-2)!} = \sqrt{(n-1)!}(1 + \sqrt{n-1}).$$ 1 bod

Kako je $(1 + \sqrt{n-1})^2 = 1 + 2\sqrt{n-1} + n - 1 > n$, slijedi da je $1 + \sqrt{n-1} > \sqrt{n}$. 1 bod

Zato je

$$a_n \geqslant \sqrt{(n-1)!}(1 + \sqrt{n-1}) > \sqrt{(n-1)!} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n!},$$

čime je dokazan korak indukcije, a samim time i tvrdnja zadatka. 1 bod

Zadatak A-4.4.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (m, n, k) za koje vrijedi

$$D(m, 20) = n, \quad D(n, 15) = k \quad \text{i} \quad D(m, k) = 5,$$

pri čeu je $D(a, b)$ najveći zajednički djelitelj brojeva a i b.

Rješenje.

Iz druge dvije jednakosti dobivamo $5 \mid k \mid 15$, a iz prve dvije jednakosti dobivamo $k \mid n \mid 20$. 1 bod

Jedini višekratnik broja 5 koji je ujedno i djelitelj brojeva 15 i 20 upravo je broj 5, pa je $k = 5$. 1 bod

Nadalje, n mora biti 5, 10 ili 20, budući da su to jedini djelitelji broja 20 djeljivi s 5. 1 bod

Ako je $n = 5$, tada jednakosti postaju

$$D(m, 20) = 5, \quad D(5, 15) = 5, \quad \text{i} \quad D(m, 5) = 5.$$

Vidimo da m mora biti višekratnik broja 5, ali ne smije biti paran jer bi tada broj $D(m, 20)$ bio djeljiv s 10. Stoga m može biti bilo koji neparni prirodni broj djeljiv s 5. 1 bod

Ako je $n = 10$, tada jednakosti postaju

$$D(m, 20) = 10, \quad D(10, 15) = 5, \quad \text{i} \quad D(m, 5) = 5.$$

Slično kao u prošlom slučaju zaključujemo da m može biti bilo koji prirodni broj djeljiv s 10, ali ne i 20. 1 bod

Ako je $n = 20$, tada jednakosti postaju

$$D(m, 20) = 20, \quad D(20, 15) = 5, \quad \text{i} \quad D(20, 5) = 5.$$

Stoga m može biti bilo koji prirodni broj djeljiv s 20. 1 bod

Dakle, sve trojke (m, n, k) su $(5a, 5, 5)$ za neparne brojeve a, $(10a, 10, 5)$ za neparne brojeve a i $(20b, 20, 5)$ za sve prirodne brojeve b.

Napomena: Dopuštene brojeve m može se zapisati i riječima kao u službenom rješenju (prirodan broj djeljiv s 10, ali ne i 20, prirodan broj djeljiv s 5, ali ne i 10 i slično).

Zadatak A-4.5.

Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi takvi da je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ te $4z_3 = 3(z_1 + z_2)$. Koliko je $|z_1 - z_2|$?

Prvo rješenje.

Primjenom apsolutne vrijednosti na zadnju jednakost dobivamo $4 = 4|z_3| = 3|z_1 + z_2|$. 2 boda

Kvadriranjem dobivene jednakosti $|z_1 + z_2| = \dfrac{4}{3}$ slijedi

$$\begin{aligned}\frac{16}{9} &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 && \text{1 bod}\\ &= 2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}, && \text{1 bod}\end{aligned}$$

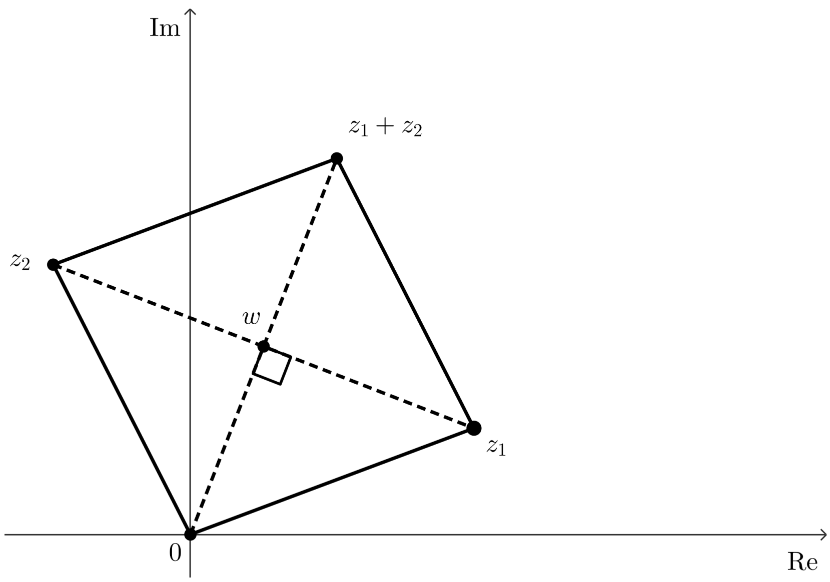
odnosno $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = \dfrac{-2}{9}$. 1 bod

Sad računamo

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}.$$

Zaključujemo da je $|z_1 - z_2| = \dfrac{2}{3}\sqrt{5}$. 1 bod

Drugo rješenje.



Primjenom apsolutne vrijednosti na zadnju jednakost dobivamo $4 = 4|z_3| = 3|z_1 + z_2|$, odnosno 2 boda

$$|z_1 + z_2| = \frac{4}{3}.$$

Kako je $|z_1| = |z_2|$, četverokut određen točkama z_1, 0, z_2 i $z_1 + z_2$ u Gaussovoj ravnini je romb. 1 bod

Neka je $w = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. U Gaussovoj ravnini to je polovište dijagonale određene dužinom koja spaja z_1 i z_2.

Dijagonale romba raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom. 1 bod

Zato prema Pitagorinom poučku za trokut određen točkama 0, z_1 i w vrijedi

$$|w|^2 + |w - z_1|^2 = |z_1|^2 \qquad \text{1 bod}$$
$$|w - z_1|^2 = |z_1|^2 - |w|^2$$
$$\left|\frac{z_1 + z_2}{2} - z_1\right|^2 = |z_1|^2 - \left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^2$$
$$\left|\frac{z_1 - z_2}{2}\right|^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$
$$\left|\frac{z_1 - z_2}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$|z_1 - z_2| = \frac{2}{3}\sqrt{5}. \qquad \text{1 bod}$$

Treće rješenje.

Neka je $z_k = a_k + b_k i$ za $k = 1, 2, 3$. Tada vrijede jednakosti $a_k^2 + b_k^2 = 1$ za $k = 1, 2, 3$ te $4(a_3 + ib_3) = 3[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i]$. To znači da je $4a_3 = 3(a_1 + a_2)$ i $4b_3 = 3(b_1 + b_2)$. 1 bod

Kvadriranjem zadnjih dviju jednakosti dobivamo

$$16a_3^2 = 9(a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2),$$
$$16b_3^2 = 9(b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2). \qquad \text{2 boda}$$

Ako ih zbrojimo i iskoristimo da je $a_k^2 + b_k^2 = 1$ za $k = 1, 2, 3$, dobivamo

$$16 = 18 + 18(a_1a_2 + b_1b_2), \qquad \text{1 bod}$$

tj. $a_1a_2 + b_1b_2 = \dfrac{-1}{9}$. 1 bod

Sad računamo

$$|z_1 - z_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2(a_1a_2 + b_1b_2) = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}. \qquad \text{1 bod}$$

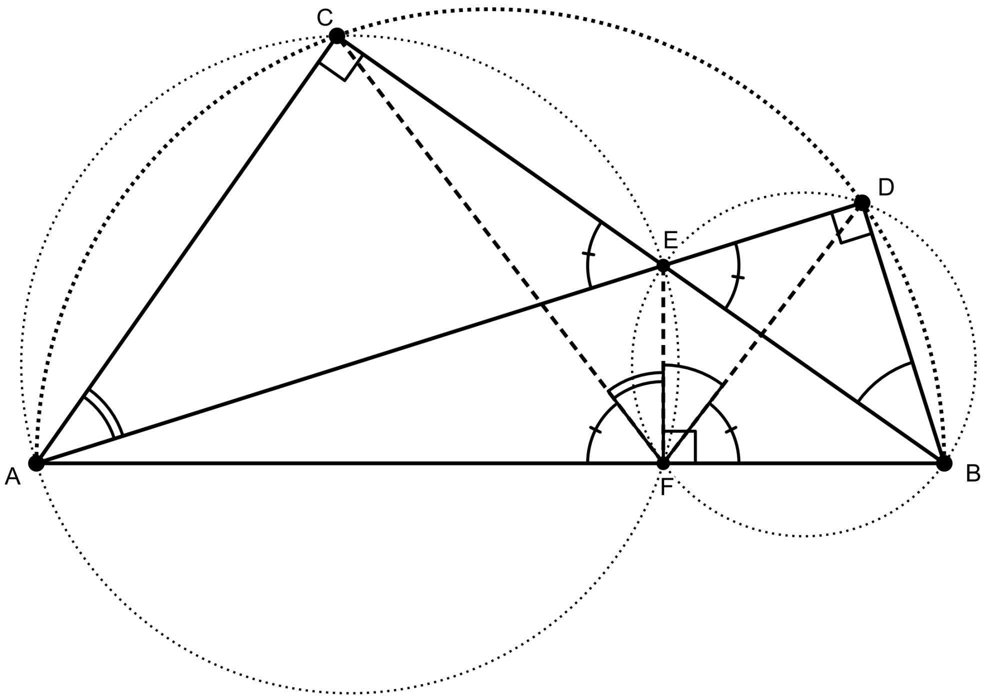
Zaključujemo da je $|z_1 - z_2| = \dfrac{2}{3}\sqrt{5}$.

Napomena: Rješenje koje koristi zapis brojeva z_k u trigonometrijskom obliku $\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k$ se boduje na isti način kao rješenje koje koristi zapis $a_k + b_k i$.

Zadatak A-4.6.

Pravokutni trokuti ABC i ABD imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{AB}$, a katete $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ im se sijeku u točki E. Neka je F ortogonalna projekcija točke E na pravac AB. Dokaži da je FE simetrala kuta $\sphericalangle CFD$.

Prvo rješenje.



Četverokut $BDEF$ je tetivan budući da ima dva nasuprotna prava kuta pri vrhovima F i C. 1 bod

Zato su prema jednakosti obodnih kutova kutovi $\sphericalangle DFE$ i $\sphericalangle DBE$ jednaki. 1 bod

Analogno, i četverokut $AFEC$ je tetivan. 1 bod

Zato slijedi jednakost kutova $\sphericalangle EFC$ i $\sphericalangle EAC$. 1 bod

Kako su kutovi $\sphericalangle ACD$ i ADB pravi, leže na kružnici određenoj promjerom $\overline{AB}$, pa zaključujemo da je četverokut $ABDC$ tetivan. 2 boda

Zato su kutovi $\sphericalangle DAC$ i $\sphericalangle DBC$ jednaki prema jednakosti obodnih kutova. 1 bod

Dakle, vrijedi

$$\sphericalangle DFE = \sphericalangle DBE = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC = \sphericalangle EAC = \sphericalangle EFC,$$ 3 boda

pa je zaista pravac EF simetrala kuta $\sphericalangle CFD$.

Drugo rješenje.

Kao u prošlom rješenju, primjećujemo da su četverokuti $BDEF$ i $AFEC$ tetivni. 2 boda

Prema jednakosti obodnih kutova u tim četverokutima imamo

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle BFD,$$ 1 bod

$$\sphericalangle AEC = \sphericalangle AFC.$$ 1 bod

Korištenjem vršnih kutova pri vrhu E, dobivamo

$$\sphericalangle BFD = \sphericalangle BED = \sphericalangle AEC = \sphericalangle AFC.$$ 4 boda

Iz toga dobivamo

$$\sphericalangle DFE = 90^\circ - \sphericalangle BFD = 90^\circ - \sphericalangle AFC = \sphericalangle CFE,$$ 2 boda

pa je EF simetrala kuta $\sphericalangle CFD$.

Zadatak A-4.7.

Niz znamenaka sastoji se od jedinica i nula. Među bilo kojih 200 uzastopnih znamenaka jednako je jedinica i nula, a među bilo koje 202 uzastopne znamenke broj se jedinica i broj nula razlikuju. Koja je najveća moguća duljina takvoga niza?

Rješenje.

Najveća moguća duljina takvog niza je 300. 1 bod

Neka je n dulijna tog niza, i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ znamenke tog niza.

Promotrimo nekih 202 uzastopnih znamenaka $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+201}$. Kako među njima broj jedinica i nula nije jednak, a među znamenkama $a_{i+2}, a_{i+3}, \ldots, a_{i+201}$ jest, zaključujemo da znamenke a_i i a_{i+1} ne smiju biti različite, odnosno $a_i = a_{i+1}$ za svaki i takav da je $201 + i \leqslant n$. 3 boda

Neka je duljina niza jednaka n. Iz ovoga slijedi da je

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-200}.$$

Kad bismo imali $n > 300$, prvih 101 znamenaka bilo bi jednako. Međutim, to nije moguće jer među prvih 200 znamenaka je točno njih 100 jednako. Zato zaključujemo da je nužno $n \leqslant 300$. 3 boda

Za $n = 300$ konstruirajmo primjer niza koji zadovoljava uvjete zadatka. Neka je prvih 100 znamenaka jednako 1, sljedećih 100 znamenaka jednako 0, a zadnjih 100 opet jednako 1. 1 bod

Kako svakih 200 uzastopnih znamenaka ovakvog niza sadrži svih 100 jedinica, zaključujemo da je među bilo kojih 200 uzastopnih znamenaka jednako je jedinica i nula. S druge strane, svakih 202 uzastopnih znamenaka opisanog niza sadrži najviše 100 jedinica i barem 102 nule, pa je i drugi uvjet zadovoljen. 2 boda

Zato je najveća moguća duljina ovakvog niza jednaka 300.

Napomena: Na isti način kako se dokaže da je $a_i = a_{i+1}$ može se dokazati i da je $a_{200+i} = a_{201+i}$ za svaki i takav da je $201 + i \leqslant n$, a onda i da je zadnjih $n - 200$ znamenaka međusobno jednako. Rješenja koja imaju ove tvrdnje, a nisu ostvarila nijedan od zadnja 3 boda iz gornje bodovne sheme, ostvaruju dodatan 1 bod.